جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تاریخ تحویل: ۲۰ آبان | تعامد | تمرین سری سوم

۱. فضاهای عامد

(آ) خواص زیر را ثابت یا رد کنید. همه زیرفضا هایی از R^n هستند.

i. اگر ماتریس A دارای سطر و ستون برابر باشد؛ آیا فضای سطری با فضای ستونی این ماتریس یکیست؟

ii. اگر فضای سطری و ستونی ماتریس A برابر باشد؛ آیا میتوان نتیجه گرفت که A و A^T برابرند؟!

iii.

$$(V^{\perp})^{\perp} = V$$

iv.

$$V \perp W \Rightarrow V^{\perp} \perp W^{\perp}$$

v.

$$V \perp W, W \perp X \Rightarrow V = X$$

vi.

$$(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$$

پاسخ:
خیر؛ ماتریس های زیر دو خاصیت اول را رد میکنند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

خاصیت سه درست است؛ زیرا:

$$s \in V, and, k \in V^{\perp} \Rightarrow s \perp k \Rightarrow s \in (V^{\perp})^{\perp}$$

خاصیت چهار درست نیست؛ زیرا دو زیرفضا را به ترتیب محور x و y بگیرید. این دو زیر فضا بر هم عمودند. اما زیر فضای عمود هرکدام؛ صفحه ای میشود که هر دو شامل محور z است. پس این رابطه درست نیست.
خاصیت پنج درست نیست؛ کافیست همان سه محور اصلی را در سه بعد در نظر بگیریم.
خاصیت ششم درست است؛ زیرا

$$s \in V^{\perp}, s \in W^{\perp}, k \in (V + W) \Rightarrow k = \lambda_۱(v_۱, ..., v_t) + \lambda_۲(w_۱, ..., w_q) \Rightarrow$$

$$s.k = \lambda_1(v_1.s, ..., v_t.s) + \lambda_2(w_1.s, ..., w_q.s) = 0 \Rightarrow s \in (V+W)^{\perp}$$

$$k \in (V+W)^{\perp} \Rightarrow \forall \lambda \in R^{t+q} : k.(\lambda(v_1, ..., v_t, w_1, ..., w_q)) = 0 \Rightarrow k \in V^{\perp}, k \in W^{\perp}$$

(ب) برای فضای مشخص شده زیر؛ فضای عمود را بدست آورید. سپس بردار مشخص شده را به صورت $v + w$ بنویسید که در آن $v \in V$ و $w \in V^{\perp}$

$$V = \{v' \in R^4 : v'_1 + v'_2 - v'_3 - v'_4\} = 0$$

پاسخ:
از آنجا که V یک فضای سه بعدی است؛ پس بعد فضای عمود آن یک خط یک بعدی خواهد بود. و این خط همان بردار نرمال ابرصفحه است. داریم:

$$V^{\perp} = n = \{v \in R^4 | \frac{v_1}{1} = \frac{v_2}{1} = \frac{v_3}{-1} = \frac{v_4}{-1}\}$$

(ج) برای قسمت قبل ماتریس تبدیل (T)یک بردار دلخواه به برداری در V را بیابید. $Tv = v' : v' \in V, v \in R^4$

پاسخ:
برای حل این قسمت؛ فرض کنید بردار دلخواهی در فضای چهاربعدی داشته باشیم. کافیست تصویر عمود آن را بر بردار نرمال بیابیم. ابتدا ماتریس تصویر بر روی فضای عمود و سپس ماتریس تصویر بر V را بدست می آوریم.

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_1(e_1) & T_1(e_2) & T_1(e_3) & T_1(e_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} T_2(e_1) & T_2(e_2) & T_2(e_3) & T_2(e_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

پس بردار دلخواه v را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$v = T_1 v + T_2 v : T_1 v \in V^{\perp}, T_2 v \in V$$

۲. تصویر فیثاغورث

(آ) ماتریس تصویر بروی سه صفحه زیر را بیابید.

$$y - z = 0$$

$$y + z = 0$$

$$x = 0$$

(ب) با توجه به ماتریس های بالا تصویر مثلث زیر را بروی سه صفحه بالا بیابید.

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}), v_3 = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

(ج) (امتیازی) ثابت کنید مجموع توان دو مساحت مثلث های تصویر شده برابر توان دو مساحت مثلث اولیه در فضاست.(فیثاغورث مساحت)

پاسخ:

برای بدست آوردن ماتریس هرکدام؛ کافیست ستون هارا با اثر نگاشت برروی پایه متداول پر کنیم. پس داریم:

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_1(e_1) & T_1(e_2) & T_1(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} T_2(e_1) & T_2(e_2) & T_2(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} T_3(e_1) & T_3(e_2) & T_3(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1\Delta = ((1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}))$$

$$T_2\Delta = ((1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}), (\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}))$$

$$T_3\Delta = ((0, 0, 1), (0, 1, \frac{3}{2}), (0, 0, \frac{1}{2}))$$

$$S^2 = (\frac{||(\frac{-1}{2}, 0, \frac{-1}{2})||}{2})^2 = \frac{1}{8}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{32}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{32}$$

$$S_3^2 = \frac{1}{16}$$

پس داریم:

$$S^2 = S_1^2 + S_1^2 + S_1^2$$

۳. تصویر عمود
فرض کنید P ماتریس تصویر بر زیرفضای S و ماتریس Q ماترسی تصویر بر زیرفضای $S^{\perp}$ باشد.

(آ) ماتریس های PQ و $P+Q$ کدامند؟!

(ب) نشان دهید معکوس ماتریس $P+Q$ خودش است!

پاسخ:

برای قسمت الف، واضح است که Q برداری را به S برده و سپس P آنرا به $S^{\perp}$ میبرد. پس درینصورت ترکیب انها هر برداری را به مبدا میبرد. پس ترکیب آنها ماتریس صفر است.
با توجه به توضیحات بالا این ماتریس ماتریس همانی خواهد بود.

۴. (آ) چه رابطه‌ای بین رنک ماتریس‌های A و A^TA وجود دارد؟ اثبات کنید.

پاسخ: ثابت می‌کنیم فضای پوچ این دو با هم مساوی است. در این صورت رنک فضای پوچ آنها هم با هم مساوی است و از آنجایی که رنک فضای پوچ $(n-r)$ است می توان برابر بودن رنک ماتریس‌های A, A^TA را از آن نتیجه گرفت.
می‌خواهیم ثابت کنیم $N(A) \subset N(A^TA)$:

$$\begin{aligned} x \subset N(A) \\ \Rightarrow Ax = ۰ \\ \Rightarrow A^TAx = ۰ \\ \Rightarrow N(A) \subset N(A^TA) \end{aligned}$$

برای اثبات عکس این موضوع داریم:

$$\begin{aligned} x \subset N(A^TA) \\ \Rightarrow A^TAx = ۰ \\ \Rightarrow x^TA^TAx = ۰ \\ \Rightarrow (Ax)^TAx = ۰ \\ \Rightarrow ||Ax|| = ۰ \\ \Rightarrow Ax = ۰ \\ \Rightarrow N(AA^T) \subset N(A) \end{aligned}$$

پس داریم:

$$N(AA^T) = N(A) \Rightarrow rank(A) = rank(A^TA)$$

(ب) فرض کنید ستون‌های ماتریس A مستقل خطی نیستند. ماتریس B را به‌گونه‌ای بیابید که طبق فرمول $P = B(B^TB)^{-۱}B^T$ بتوان ماتریس projection مربوط به A را بدست آورد.

پاسخ:

در صورتی که ستون‌های ماتریس A مستقل خطی نباشند، ستون‌هایی که ترکیب خطی ستون‌های دیگر هستند را از ماتریس حذف می‌کنیم. هر پایه‌ای از فضای ستونی A را که در نظر بگیریم پاسخ مسئله خواهد بود.

۵. ماتریس A را به روش QR تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$A = QR \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۲}{\sqrt{۶}} & ۰ \\ -\frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۶}} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -\sqrt{۳} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ ۰ & \sqrt{۶} & \frac{۵}{\sqrt{۶}} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

۶. دو خط $l_۱ = (۲y - ۱, ۳y, ۲)$ و $l_۲ = (x, x, x)$ در فضای سه‌بعدی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. کمترین فاصله‌ی بین این دو خط را d می‌نامیم. مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که مقدار $d^۲$ کمینه شود. (راهنمایی: سعی کنید مسئله را به روش کمترین مربعات ارتباط دهید)

پاسخ: مقدار d را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه معادله $d = ۰$ جواب ندارد، معادله را به فرم ماتریسی می‌نویسیم و با استفاده از روش کمترین مربعات آن را تا حد امکان به صفر نزدیک می‌کنیم.

$$d = l_۱ - l_۲ = (۲y - x - ۱, ۳y - x, ۲ - x)$$

$$d = ۰ \rightarrow \begin{cases} -x + ۲y = ۱ \\ -x + ۳y = ۰ \\ x \qquad = ۲ \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}.$$